تحليليـــة الفضـــاء

I) الأساس في الفضاء التجهي V_3

1) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ 3متجهات من V_3 و A و B وC و D 4نقط بحيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$.

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B وC و D مستوائية .

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B وC و D غيرمستوائية .

2) لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3متجهات غير مستوائية من V_3 .

(* كل متجهة من V_3 تكتب بطريقة وحيدة على شكل
$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

(* نقول إن المثلوث $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(* إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ فإن المثلوث (x,y,z) يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ونكتب $\vec{u}:(x,y,z)$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

3) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

a) نعتبر المتجهتين $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$.

لدينا $\vec{u}+\vec{v}:(x+x',y+y',z+z')$ و $\alpha\vec{u}:(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$.

من أجل دراسة استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وهي :

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} .$$

(* إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين .

(* إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غيرمستقيميتين .

c) نعتبر المتجهات $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$ و $\vec{w}:(x'',y'',z'')$.

(* نسمي محددد المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ العدد الذي نرمز له بالرمز $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ والمعرف بما يلي :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$

(* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

ملاحظة

a) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$

b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=0$

c) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلا : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية و $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=\gamma=0$.

II) المعلـــم في الفضـــاء

1) نسمي معلما في الفضاء كل رباعي $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث O نقطة من الفضاء و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3متجهات غير مستوائية يعني أساس .

2) ليكن $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما في الفضاء .

a) لكل نقطة M من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{OM}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. المثلوث (x,y,z) يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة المعلم R ونكتب $M(x,y,z)$ أو $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

ملاحظة $M(x,y,z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

b) نعتبر النقطتين $A(x,y,z)$ و $B(x',y',z')$

(* لدينا $\overrightarrow{AB}(x'-x,y'-y,z'-z)$

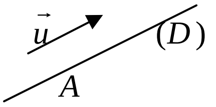
(* إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$$

III) المستقبـــم فـــي الفضـــاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة . المستقيم المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $D(A,\vec{u})$ والمعرفة ب



$$D(A,\vec{u})=\left\{M\in E\ /\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\right\}$$

ملاحظة $M\in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

2) تمثيل بارامتري لمستقيم

تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ هو :

$$(D):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\quad(t\in IR)$$

3) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم .

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$

(* إذا كانت الأعداد a و b و c غير منعدمة فإن معادلتا (D) هما :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

(* إذا كان عدد واحد منعدم وعددين غير منعدمين .مثلا $b=0$ ، $a\neq0$ و $c\neq0$ فإن معادلتا (D) هما :

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{z-z_0}{c}\\ y-y_0=0\end{cases}$$

*) إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين .مثلا $a=0$ ، $b=0$

و $c\neq 0$ فإن معادلتا (D) هما : $\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$

4) الأوضاع النسبية لمستقيمين .

ملاحظة من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين بارامتريين .

نعتبر المستقيمين

$$(\Delta):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \text{ و } (\Delta'):\begin{cases} x=x_1+a't' \\ y=y_1+b't' \\ z=z_1+c't' \end{cases}$$

لدينا (Δ) مار من $A(x_0,y_0,z_0)$ وموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$

و (Δ') مار من $B(x_1,y_1,z_1)$ وموجه ب $\vec{u}(a',b',c')$

من أجل دراسة تقاطع (Δ) و (Δ') نقو بدراسة استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن $(\Delta)//(\Delta')$. ولمعرفة هل (Δ) و (Δ') منطبقان أم متوازيان قطعا . نتحقق هل $A\in(\Delta')$ ؟

*) إذا كان $A\in(\Delta')$ فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

*) إذا كان $A\notin(\Delta')$ فإن (Δ) و (Δ') متوازيان قطعا .

b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن (Δ) و (Δ') متقطعان أو غير مستوائيين ، ولمعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظمة :

بحل النظمة المكونة من معادلتين والتحقق $(S)\begin{cases} x_0+at=x_1+a't' \\ y_0+bt=y_1+b't' \\ z_0+ct=z_1+c't' \end{cases}$ في الثالثة .

i) إذا كان للنظمة (S) حلا فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان وللحصول على إحداثيات نقطة التقاطع نعوض t في تمثيل (Δ) أو t' في تمثيل (Δ') .

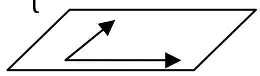
ii) إذا كانت النظمة (S) لا تقبل حلا فإن (Δ) و (Δ') غير مستوائيين.

IV) المستــــــــوى فـــــي الفضـــــاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين . المستوى المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $P(A,\vec{u},\vec{v})$ والمعرفة ب

$$P(A,\vec{u},\vec{v})=\left\{M\in E\ /\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right\}$$



ملاحظة $M\in P(A,\vec{u},\vec{v}) \iff$ ($\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية)

2) تمثيل بارامتري لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ تمثيل بارامتري للمستوى (P) هو :

$$(P):\begin{cases} x=x_0+at+a't' \\ y=y_0+bt+b't' \quad (t,t'\in IR) \\ z=z_0+ct+c't' \end{cases}$$

3) معادلة ديكارتية لمستوى .

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$.

للحصول على معادلة ديكارتية لـ (P) نتبع ما يلي :

$$M(x,y,z)\in(P)\iff \det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix}=0$$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax+By+Cz+D=0$

حيث $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

4) تقاطع مستويين .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معدلتين ديكارتيتين

نعتبر المستويين : $(P):ax+by+cz+d=0$

$(Q):a'x+b'y+c'z+d'=0$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Q) نقوم بحساب المحددات

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $(P)//(Q)$.

b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) الذي معادلتاه الديكارتيتان هما :

$$(D):\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

5) تقاطع مستوى ومستقيم .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل بارامتري بالنسبة للمستقيم .

نعتبر المستوى $(P):\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ والمستقيم

$$(\Delta):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Δ) نقوم بحل النظمة :

$$\begin{cases} x=x_0+at & (1) \\ y=y_0+bt & (2) \\ z=z_0+ct & (3) \\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 & (4) \end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بمجهول واحد t .

a) إذا كان لهذه المعادلة حلا $t=t_0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة (نحصل على إحداثياتها بتعويض t في (1) و (2) و (3) .

b) إذا كان لهذه المعادلة مالانهاية له من الحلول $(0=0)$ فإن $(\Delta)\subset(P)$.

c) إذا كنت هذه المعادلة لاتقبل حلا" $(4=0)$ مثلا " فإن (Δ) و (P) متوازيان قطعا .

ملاحظة

*) $D(A,\vec{u})//D'(B,\vec{v})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

*) $D(A,\vec{u})//P(B,\vec{v},\vec{w})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

*) $P(A,\vec{u},\vec{v})//P'(B,\vec{x},\vec{y})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائية و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائية .